

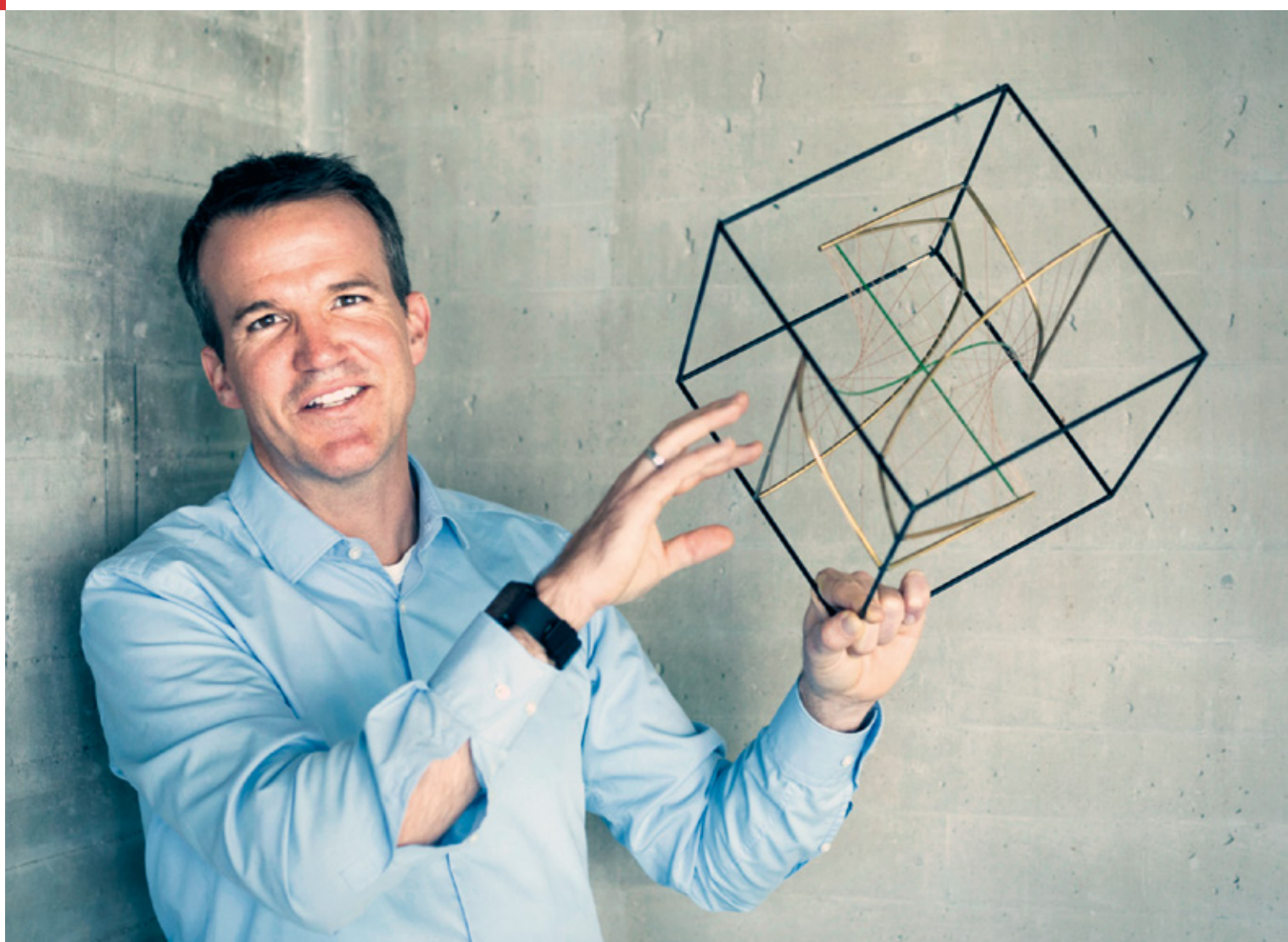
USAG

HESSEN



**LOEWE**

ABSCHLUSSBERICHT



**LOEWE-Schwerpunkt USAG**  
**Uniformisierte Strukturen in Arithmetik**  
**und Geometrie**

# Inhalt

- 2 Statement des Koordinators
- 3 Projektinhalte
- 3 Wissenschaftlich-technische Ausgangslage
- 3 Im Rahmen des LOEWE-Projekts erreichte Erkenntnisse und getätigte Entwicklungen
- 5 Erreichte Strukturentwicklung
- 6 Erreichte Bedeutung/Stellung im Themen-/Forschungsfeld
- 7 Wichtigste Meilensteine des Projekts
- 9 Weitere Informationsmöglichkeiten
- 10 Zahlen und Fakten
- 11 Kurzvorstellung der beteiligten Hochschulen und außeruniversitären Forschungsinstitute
- 12 Impressum

Der LOEWE-Schwerpunkt Uniformisierte Strukturen in Arithmetik und Geometrie war in der mathematischen Grundlagenforschung angesiedelt und befasste sich mit zentralen Forschungsfragen der algebraischen Geometrie und der Zahlentheorie. Das Konzept der Uniformisierung ist von der Idee geleitet, ein global kompliziertes geometrisches Objekt durch ein deutlich einfacheres zu ersetzen, ohne die lokale Struktur zu verändern. Dabei wird die Komplexität des ursprünglichen Objekts in Symmetrien kodiert. Im Schwerpunkt gelang es, durch die Verbindung verschiedener Techniken der Uniformisierung neue Einsichten zu aktuellen arithmetischen und geometrischen Klassifikationsproblemen zu erlangen.

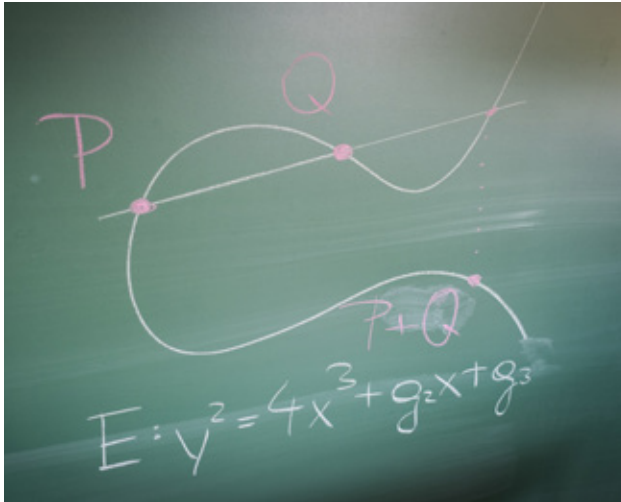


Diese Erfolge wurden im Rahmen der LOEWE-Förderung durch die Kombination der Expertise von Projektleitenden des Schwerpunkts Algebra und Geometrie der Goethe-Universität Frankfurt sowie von Projektleitenden der Arbeitsgruppe Algebra der TU Darmstadt ermöglicht. Hierdurch entstand eine intensive und nachhaltige Forschungs Kooperation, die maßgeblich dazu beigetragen hat, gemeinsam mit Kolleginnen und Kollegen der Universität Heidelberg, als Nachfolgeprojekt einen SFB-Transregio bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft einzuwerben. Dieser SFB-Transregio 326 zum Thema *Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures* nahm im Juli 2021 seine Arbeit auf. Die durch den LOEWE-Schwerpunkt eingerichteten Qualifikationsprofessuren sind mit eigenen Projekten daran beteiligt. Darüber hinaus wurden durch Mitglieder des Schwerpunkts in erheblichem Umfang weitere Drittmittel eingeworben, wie etwa DFG-Projekte, ein ERC Starting Grant und eine LOEWE-Startprofessur.

Neben den Erfolgen in den Forschungsprojekten haben verschiedene internationale Konferenzen sowie das umfangreiche Qualifizierungsprogramm für den wissenschaftlichen Nachwuchs zu einer starken internationalen Sichtbarkeit des Schwerpunkts geführt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mithilfe der LOEWE-Förderung ein Zentrum in der mathematischen Forschung in der Rhein-Main-Region etabliert werden konnte, das auch in der Zukunft spannende Durchbrüche in der Forschung erwarten lässt.

Professor Dr. Jan Hendrik Bruinier  
Technische Universität Darmstadt  
Koordinator des LOEWE-Schwerpunktes USAG



Darstellung der Summe von zwei Punkten auf einer elliptischen Kurve.

## Projekthalt

### Wissenschaftlich-technische Ausgangslage

Das Konzept der Uniformisierung geht auf berühmte Arbeiten von Bernhard Riemann und Felix Klein aus dem 19. Jahrhundert zurück. Sie wurden von der Idee geleitet, einen global komplizierten geometrischen Raum durch einen deutlich einfacheren zu beschreiben, der dieselbe lokale Struktur besitzt. Die Komplexität wird dabei durch innere Symmetrien des einfacheren Raumes kodiert. Ein anschauliches Beispiel hierfür sind Pflasterungen, bei denen nach Zusammensetzen komplizierter Einzelteile die gesamte Ebene überdeckt wird. Die Symmetrien sind hierbei durch Verschiebungen der Pflastersteine gegeben. Diese Grundidee hat sich als äußerst schlagkräftig erwiesen und wurde seither in verschiedene Richtungen verallgemeinert, wie etwa auf sogenannte nicht-archimedische Geometrien.

Im LOEWE-Schwerpunkt Uniformisierte Strukturen in Arithmetik und Geometrie (USAG) sollten durch die Verbindung verschiedener Techniken der Uniformisierung neue Einsichten zu aktuellen arithmetischen und geometrischen Klassifikationsproblemen gewonnen werden. Gegenstand der Untersuchungen sind dabei algebraische Varietäten, also Lösungsmengen von Gleichungssystemen, die durch Polynome gegeben sind.

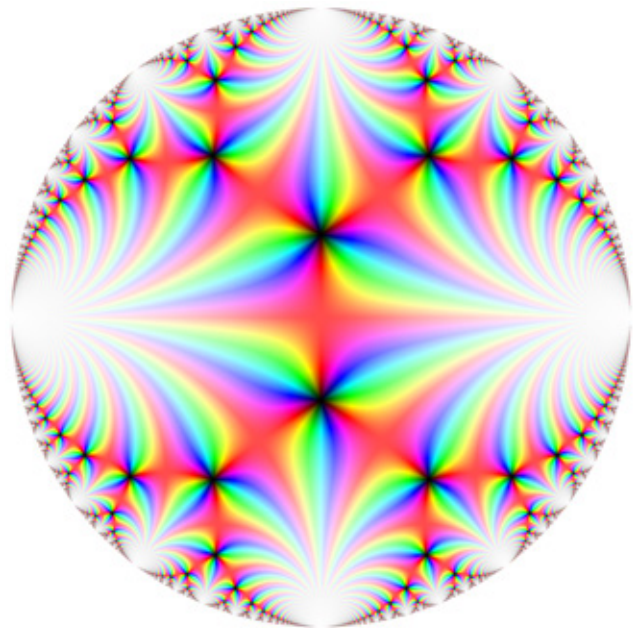
Wichtige Beispiele, wie elliptische Kurven und Calabi-Yau-Varietäten, spielen auch in Anwendungen in der Kryptographie und in der Mathematischen Physik eine prominente Rolle. So sind etwa Verschlüsselungsverfahren, die auf elliptischen Kurven und ähn-

lichen arithmetischen Strukturen basieren, bei jedem Online-Einkauf im Einsatz und somit aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken. Die Forschung im Schwerpunkt legt auch die mathematischen Grundlagen für die Weiterentwicklung derartiger Verfahren.

### Im Rahmen des LOEWE-Projekts erreichte Erkenntnisse und getätigte Entwicklungen

Im Rahmen des Schwerpunkts wurden mithilfe sämtlicher Aspekte der Uniformisierung bedeutende wissenschaftliche Fortschritte erzielt. Diese Aspekte betreffen zum einen die Geometrie von Unterobjekten, die sich durch spezielle Eigenschaften in der Uniformisierung auszeichnen. Beispielsweise sind diese Unterobjekte grob durch kohomologische Invarianten charakterisiert, und hinsichtlich der Polyhedralität des Erzeugnisses dieser Invarianten sind in mehreren Projekten, auch von Promovierenden, neue Erkenntnisse erzielt worden. Andere Aspekte betreffen die Strukturen, die mithilfe von Uniformisierungen gebildet werden.

Ein Durchbruch ist uns dabei zum Beispiel bei der Klassifikation von Vertex-Algebren gelungen, welche spezielle zweidimensionale Quantenfeldtheorien beschreiben. Diese stehen nämlich mithilfe einer



Phasenporträt der Klein'schen  $j$ -Funktion und ihrer Symmetrien.



Teilnehmende des USAG-Workshops „Modular Forms on Higher Rank Groups“, 2019, TU Darmstadt.

Überlagerungskonstruktion alle in Beziehung zur Vertex-Algebra des 24-dimensionalen Leech-Gitters. Neben der klassischen Uniformisierung über den komplexen Zahlen waren auch Uniformisierungen über anderen Zahlbereichen oder in anderen Geometrien Gegenstand der Forschung in diesem LOEWE-Schwerpunkt. Beispielsweise führte die kombinierte Expertise mehrerer beteiligter Projektleitenden zur Lösung eines wichtigen Realisierbarkeitsproblems in der tropischen Geometrie. Die gewonnenen wissenschaftlichen Erkenntnisse sind in 72 referierte Publikationen eingeflossen, die in führenden internationalen Zeitschriften veröffentlicht wurden.

Strukturell wurde durch den LOEWE-Schwerpunkt die Verbindung zwischen Arbeitsgruppen in Darmstadt und Frankfurt gestärkt, wodurch ein gemeinsamer Antrag auf Einrichtung eines Sonderforschungsbereiches in der arithmetischen Geometrie erfolgreich war. Der SFB Transregio 326 *Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures* (GAUS) ist im Juli 2021, im vierten Jahr der LOEWE-Förderung, gestartet. Er verbindet die Goethe-Universität Frankfurt und TU Darmstadt mit Arbeitsgruppen an der Universität

Heidelberg und stärkt durch die Einbindung der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz zudem die Allianz der Rhein-Main-Universitäten. Durch Mitglieder des Schwerpunkts wurden darüber hinaus in erheblichem Umfang weitere Drittmittel bei der DFG und dem ERC eingeworben.

Der LOEWE-Schwerpunkt hat zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses wesentlich beigetragen, indem zwei Qualifikationsprofessuren und 25 Postdoktorandinnen und -doktoranden die Gelegenheit zur wissenschaftlichen Weiterentwicklung gegeben wurde. Zudem wurden im Rahmen des Schwerpunkts 22 Promotionen erfolgreich abgeschlossen. Der wissenschaftliche Nachwuchs profitierte dabei vom umfangreichen Qualifizierungsprogramm des Schwerpunkts.

Dieses Qualifikationsprogramm bestand aus einem abgestimmten Angebot an Spezialvorlesungen, Blockkursen und Forschungsseminaren zur Thematik des Schwerpunkts. Darüber hinaus veranstaltete der Schwerpunkt Sommerschulen für Promovierende und Postdocs, die auch externen Teilnehmenden offen-



standen, was auch die Vernetzung der Nachwuchswissenschaftlerinnen und -wissenschaftler befördert hat. So fand im Februar 2019 beispielsweise die „Winterschool on Enumerative Geometry and Modular forms“ an der GU Frankfurt statt. Kern der Schule waren drei Vortragsreihen zum Themenbereich enumerative Geometrie und Gromov-Witten-Invarianten. Diese Reihen wurden durch spezifische Fachvorträge von internationalen Expertinnen und Experten mit den neuesten Resultaten im Themengebiet ergänzt.

Die Einschränkungen durch die Corona-Pandemie ab dem Frühjahr 2020 stellten eine Herausforderung dar. Lange geplante Konferenzen mussten zum Teil kurzfristig abgesagt oder verschoben werden und Teile des Qualifizierungsprogramms für den wissenschaftlichen Nachwuchs mussten neu konzipiert werden. Viele Veranstaltungen wurden zunächst online und später in einem hybriden Format weitergeführt. Jedoch erlitt der unmittelbare persönliche Austausch in den Arbeitsgruppen spürbare Einschränkungen, die durch Online-Formate nur teilweise aufgefangen werden konnten. Die Möglichkeit eine kostenneutrale Laufzeitverlängerung zur Abmilderung der Folgen der Corona-Pandemie zu beantragen, nahm der LOEWE-Schwerpunkt daher gerne wahr. Die damit gewonnene Flexibilität für den effektiven Einsatz der Projektmittel war sehr hilfreich.

Um den Transfer der Erkenntnisse des LOEWE-Schwerpunkts USAG in die Gesellschaft zu gewährleisten, wurde eine öffentliche Vortragsreihe mit dem Titel „Mathe für alle – Was Sie schon immer über Mathematik wissen wollten und nie zu fragen wagten“ etabliert. Das Konzept dieser Veranstaltungsreihe sah öffentliche, allgemeinverständliche Vorträge zu aktuellen Themen des Schwerpunkts mit einem interessanten Anwendungsbezug vor. Im Anschluss hatten alle Besucherinnen und Besucher die Möglichkeit, bei einem Glas Wein oder Saft mit den anwesenden Expertinnen und Experten zu diskutieren. Themen in dieser Reihe waren zum Beispiel Primzahlen sowie die Arbeit des Fieldsmedaillenträgers Peter Scholze zu perfektoiden Räumen. Darüber hinaus beteiligte sich der LOEWE-Schwerpunkt im Jahr 2021 an der ProLOEWE-Wissenschaftsrallye mit einem Kurzfilm, der das Konzept der Uniformisierung anhand eines Billardtisches erklärt.

## Erreichte Strukturentwicklung

Um eine nachhaltige Entwicklung des LOEWE-Schwerpunkts und ein Erreichen der langfristigen Forschungsziele sicherzustellen, sollte als Anschlussprojekt ein SFB-Transregio im Bereich der Geometrie, Topologie und Arithmetik beantragt werden. Dieser sollte auf dem LOEWE-Schwerpunkt USAG und der DFG-Forschergruppe 1920 *Symmetrie, Geometrie, Arithmetik* der Universitäten in Heidelberg und Darmstadt aufbauen und diese verbinden. Das Nachhaltigkeitsziel wurde seit dem ersten Jahr der LOEWE-Förderung mit Nachdruck verfolgt und zur großen Freude aller beteiligten Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler vollständig erreicht. Der SFB-Transregio 326 *Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures* (GAUS) wurde zum 01.07.2021 von der DFG eingerichtet.

Die Standorte dieses SFB-Transregio sind die Universitäten in Frankfurt, Darmstadt und Heidelberg. Der Sprecher ist Jakob Stix (Goethe-Universität Frankfurt), Co-Sprecher sind Jan Bruinier (TU Darmstadt) und Alexander Schmidt (Universität Heidelberg). Zwei Projektleiter von der Johannes-Gutenberg-Universität Mainz sowie eine Projektleiterin von der Uni-

versität Münster ergänzen das Forschungsteam mit ihrer Expertise. Die im Rahmen des LOEWE-Schwerpunkts neu eingerichteten Qualifikationsprofessuren, die durch Yingkun Li und Martin Ulirsch besetzt wurden, sind beide als Projektleiter im SFB-Transregio beteiligt.

Eine weitere Verstärkung des Forschungsverbundes stellte die Berufung von Timo Richarz im Jahr 2019 auf eine Qualifikationsprofessur am Fachbereich Mathematik der TU Darmstadt dar. Mit seinem Forschungsprofil in der Arithmetischen Geometrie und im Langlands-Programm erweitert Herr Richarz die Expertise des LOEWE-Schwerpunkts in ausgezeichneter Weise. Herr Richarz war als assoziierter Wissenschaftler am LOEWE-Schwerpunkt beteiligt und ist nun ebenfalls Projektleiter im SFB-Transregio. Im Dezember 2021 wurde er mit einem ERC Starting Grant ausgezeichnet. Zur Abwehr von externen Rufen wurde er 2022 in einem ad personam Verfahren auf eine unbefristete W2-Professur an der TU Darmstadt berufen. Seit kurzem wird seine Forschung auch durch eine LOEWE-Start-Professur für einen Zeitraum von insgesamt sechs Jahren gefördert.

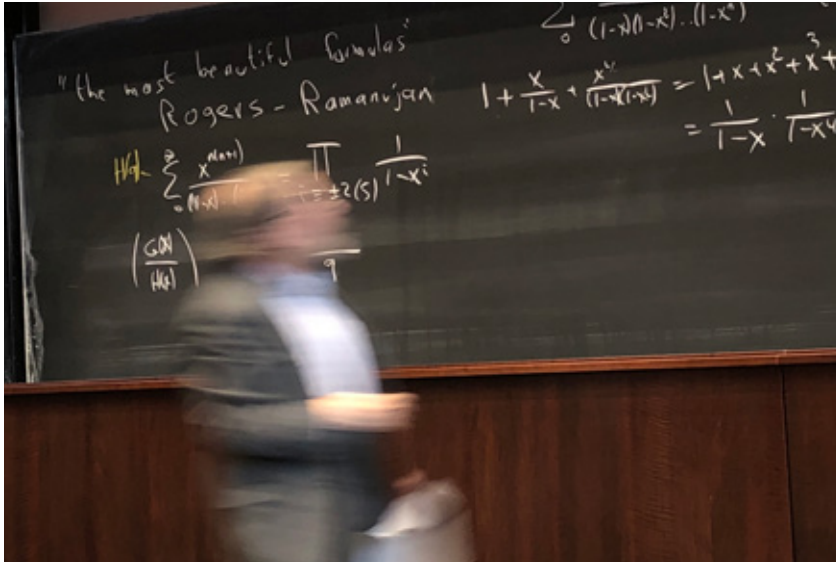
Zusätzlich verstärkt wurde der Forschungsverbund durch eine Tenure-Track-Professur in der reinen Mathematik am Standort Frankfurt, gefördert durch die Mittel des Hessischen Hochschulpaktes (300-Professuren-Programm). Auf diese Professur wurde Katharina Hübner im Dezember 2022 berufen.

## Erreichte Bedeutung/Stellung im Themen-/Forschungsfeld

Ein großer Teil der Ziele des LOEWE-Schwerpunkts USAG wurde im Berichtszeitraum erreicht. In einzelnen Projekten konnten sogar darüber hinaus gehende Erkenntnisse erzielt werden, die in der Fachwelt für Aufsehen gesorgt haben. Nicht zuletzt das umfangreiche Programm an internationalen Konferenzen und Sommerschulen, sowie die Qualifikationsmöglichkeiten für Promovierende und Postdoktorantinnen und -doktoranden, haben zu einer starken internationalen Sichtbarkeit geführt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass durch die LOEWE-Förderung eine Schwerpunktbildung im Bereich der arithmetischen Geometrie an den Universitäten in Darmstadt, Frankfurt und Heidelberg befördert wurde, die mit dem neu eingerichteten SFB-Transregio GAUS in der Zukunft weiter verstärkt werden wird. Diese Schwerpunktbildung wird durch die oben beschriebenen weiteren Strukturmaßnahmen unterstützt. Wir sind überzeugt, auch in der Zukunft wichtige Durchbrüche in der Forschung auf dem Gebiet der Arithmetischen Geometrie erzielen zu können.

## Wichtigste Meilensteine des Projekts



Prof. Don Zagier, Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn. Vortrag beim Eröffnungskolloquium des LOEWE-Schwerpunkts USAG am 2. Februar 2018.



Konferenz „Women in Automorphic Forms“, 2018, TU Darmstadt.





„Was Sie schon immer über Mathematik wissen wollten, aber bisher nicht zu fragen wagten“, öffentlicher Vortrag Prof. Torsten Wedhorn zu perfektoiden Räumen, 2019, TU Darmstadt.



Teilnehmende der Winter School on „Enumerative Geometry and Modular Forms“, 2019, GU Frankfurt.



Co-Koordinator Prof. Martin Möller erklärt das Konzept der Uniformisierung bei der ProLOEWE Wissenschaftsrallye 2021.



Logo des neuen SFB-Transregio 326 GAUS, der im Juli 2021 seine Arbeit aufnahm.

## Weitere Informationsmöglichkeiten

- <https://www.mathematik.tu-darmstadt.de/loewe-usag>  
Webseite des LOEWE-Schwerpunkts
- <https://proloewe.de/de/loewe-vorhaben/nach-themen/uniformisierte-strukturen/>  
ProLOEWE Webseite zum Projekt
- <https://proloewe.de/de/persoendlich/professor-dr-jan-hendrik-bruinier/>  
ProLOEWE Interview mit Jan Hendrik Bruinier
- <https://crc326gaus.de/>  
Webseite des SFB/TRR 326 *Geometry and Arithmetic of Uniformized Structures* (GAUS),  
Nachfolgeprojekt des LOEWE-Schwerpunkts

Zahlen und Fakten<sup>1</sup>

<b>Förderzeitraum</b>	<b>01.01.2018 – 31.12.2022</b>
Bewilligte LOEWE-Mittel in Euro	3.487.958
Bewilligte Drittmittel in Euro	10.448.540
Beschäftigte insgesamt <sup>2</sup>	54
darunter LOEWE-finanziert	4,5
Erfolgreich abgeschlossene Promotionen	25
Erfolgreich abgeschlossene Habilitationen	–
Wissenschaftliche Publikationen	272
Fachvorträge auf wissenschaftlichen Tagungen/Konferenzen	265
Angemeldete Patente	–
darunter bereits erteilt	–

<sup>1</sup> Die Angaben beziehen sich mit Ausnahme der Beschäftigten auf die gesamte Projektlaufzeit.

<sup>2</sup> Die Anzahl der Beschäftigten bezieht sich auf alle Beschäftigten, die an dem LOEWE-Projekt mitgearbeitet haben, in Vollzeitäquivalenten, unabhängig von ihrer Finanzierung, Stichtag 31.12. des letzten Förderjahres.

## Kurzvorstellung der beteiligten Hochschulen und außeruniversitären Forschungsinstitute

### Technische Universität Darmstadt

<https://www.tu-darmstadt.de>

Als Europäische technische Universität stehen wir für exzellente und relevante Wissenschaft. Globale Transformationen – von der Energiewende über Industrie 4.0 bis zur Künstlichen Intelligenz – fordern uns heraus. Diese tiefgreifenden Veränderungsprozesse gestalten wir durch herausragende Erkenntnisse und zukunftsweisende Studienangebote entscheidend mit. Unsere Spitzenforschung bündeln wir in drei Feldern: Energy and Environment, Information and Intelligence, Matter and Materials. Die große, problemzentrierte Interdisziplinarität zwischen Ingenieur-, Natur-, Geistes- und Sozialwissenschaften zeichnet Forschung und Studium bei uns aus. Mit wissenschaftlichen Kooperationspartnern, Gesellschaft, Wirtschaft und Politik stehen wir in intensivem und produktivem Austausch. Aus dieser Vielstimmigkeit erwachsen Fortschritte für eine weltweit nachhaltige Entwicklung.



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

### Goethe-Universität Frankfurt am Main

<https://www.uni-frankfurt.de>

Die Goethe-Universität ist eine forschungsstarke Hochschule in der europäischen Finanzmetropole Frankfurt. Lebendig, urban und weltoffen besitzt sie als Stiftungsuniversität ein hohes Maß an Eigenständigkeit. 1914 als erste Stiftungsuniversität Deutschlands von Frankfurter Bürgern gegründet, ist sie mit über 43.376 Studierenden (Stand WS 2022/23) eine der größten Universitäten Deutschlands. Als „Werkstatt der Moderne“ hat die Goethe-Universität Maßstäbe in den Sozial- und Naturwissenschaften gesetzt. Diese bedeutenden Traditionslinien werden heute in sechs Profildbereichen weitergeführt. In der hessischen LOEWE-Offensive überzeugten die Universität und ihre Partner aktuell mit drei Zentren und acht Schwerpunkten. Als erste deutsche Hochschule in bürgerschaftlicher Tradition bietet die Goethe-Universität zudem eine große Zahl von Formaten, die den Bürgerdialog stärken und Wissenschaft in die Gesellschaft tragen.



HESSEN



Das Forschungsförderungsprogramm LOEWE ist eine Förderinitiative des Hessischen Ministeriums für Wissenschaft und Forschung, Kunst und Kultur.

## Impressum

### Herausgeber:

Hessisches Ministerium  
für Wissenschaft und Forschung, Kunst und Kultur  
Rheinstraße 23 – 25  
65185 Wiesbaden

### Inhalt:

LOEWE-Schwerpunkt USAG – Uniformisierte Strukturen  
in Arithmetik und Geometrie

### Redaktion:

LOEWE-Geschäftsstelle im Hessischen Ministerium  
für Wissenschaft und Forschung, Kunst und Kultur

### Layout:

Christiane Freitag, Idstein

### Fotos und Grafiken:

LOEWE-Schwerpunkt USAG – Uniformisierte Strukturen  
in Arithmetik und Geometrie

Titel: © Katrin Binner; S. 3 Abb. 1 und S. 7 Abb. 1: © Jan Hendrik Bruinier; S. 3 Abb. 2, S. 4 und S. 8 Abb. 1: © Michalis Neururer; S. 5: © Karl H. Hofmann; S. 7 Abb. 2: © Claudia Alfes-Neumann; S. 8 Abb. 2: © Matthias Colmar; S. 8 Abb. 3: © Uwe Dettmar